Alexis Michelat
EPFL - Printemps 2025 **Examen blanc**
Algèbre linéaire avancée II Section de Physique 19 avril 2025

Ici comme dans l'examen final, les QCM représentent entre 30 et 35% de la note finale. Les réponses correctes comptent pour $2,5$ points s'il y a quatre réponses possibles, 1 point pour les questions de type « vrai-faux », et dans les deux cas, les réponses incorrectes ou absentes pour 0 point. **Il n'y a donc pas de points négatifs dans l'examen, le but étant de tester vos connaissances, et non ce que vous ne savez pas.** Il y a dix questions pour lesquelles on donne quatre réponses possibles, cinq questions vrai-faux (qui représentent donc $2,5 \times 10 + 5 \times 1 = 30$ points) ainsi que cinq exercices à rédaction détaillée représentant 70 points. Le total des points est donc égal à 100.

Questionnaire à choix multiples

Question 1 (2,5 points)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_8(\mathbb{C})$ telle que $J(A) = J_4(4i) \oplus J_1(4i) \oplus J_2(\sqrt{5}) \oplus J_1(\sqrt{5})$. Alors, le rapport $\kappa_A = \dfrac{\chi_A}{\mu_A}$ entre le polynôme caractéristique et le polynôme minimal est égal à

- ☐ $(X - 4i)^4(X - \sqrt{5})^2$.
- ☐ $(X - 4i)^2(X - \sqrt{5})^2$.
- ☐ 1.
- ☐ $(X - 4i)(X - \sqrt{5})$.

Question 2 (2,5 points)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_9(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique et le polynôme minimal sont donnés respectivement par $\chi_A(X) = (-X - 1)(X + 7i)^3(X - \sqrt{2})^5$ et $\mu_A = (X + 1)(X + 7i)^2(X - \sqrt{2})^4$. Alors, la matrice de Jordan $J(A)$ de A est donnée par

- ☐ $J_1(-1) \oplus J_3(-7i) \oplus J_5(\sqrt{2})$.
- ☐ $J_1(-1) \oplus J_2(-7i) \oplus J_1(-7i) \oplus J_5(\sqrt{2})$.
- ☐ $J_1(-1) \oplus J_2(-7i) \oplus J_1(-7i) \oplus J_4(\sqrt{2}) \oplus J_1(\sqrt{2})$.
- ☐ $J_1(-1) \oplus J_2(-7i) \oplus J_1(-7i) \oplus J_3(\sqrt{2}) \oplus J_2(\sqrt{2})$.

Question 3 (2,5 points)**.** Laquelle des applications suivantes **n'est <u>pas</u>** une forme linéaire sur l'espace E donné, c'est-à-dire, un élément de E' ?

- ☐ $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K}$ est un corps) et $\mathrm{Tr} : E \to \mathbb{K}$ est la trace.
- ☐ $E = C^0(\mathbb{R})$ et $L : E \to \mathbb{R}, f \mapsto f(0)f(1)$.
- ☐ $E = C^1([0,1]) \cap \{f : f(0) = 0\}$ et $I : E \to \mathbb{R}, f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)\frac{dx}{x}$.
- ☐ $E = C^0(\mathbb{R}) \cap \left\{ f : \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty \right\}$ et $M : E \to \mathbb{R}, f \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx$.

Question 4 (2,5 points)**.** Laquelle des applications suivantes **n'est** **pas** une forme bilinéaire sur l'espace E donné ?

☐ $E = \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B : E \times E \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$.
☐ $E = \mathbb{R}^4$ et $B : E \times E \to \mathbb{R}, ((x, y, z, t), (x', y', z', t')) \mapsto xy' + yt' + zx' + ty' + 1$.
☐ $E = \mathbb{C}^2$ et $B : E \times E, ((z, w), (z', w')) \mapsto zw' + wz'$.
☐ $E = C^0([0, 1])$ et $B : E \times E \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Question 5 (2,5 points)**.** Soit $V_1 = \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ et $V_2 = \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$. Alors, la dimension **réelle** de $V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2$ est égale à

☐ 22.
☐ 44.
☐ 96.
☐ 192.

Question 6 (2,5 points)**.** Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + 2xy + z^2 - 4yz + 2xz$. Alors, la signature de Q est égale à

☐ $(3, 0)$.
☐ $(0, 3)$.
☐ $(2, 1)$.
☐ $(1, 2)$.

Question 7 (2,5 points)**.** Laquelle des formes bilinéaires sur l'espace vectoriel réel V **n'est** **pas** un produit scalaire ?

☐ $V = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, x_k\, y_k$.
☐ $V = \mathbb{R}^4$, $\langle (x, y, z, t), (x', y', z', t')\rangle = 2xx' + yy' + xz + x'z' + 2zz' + tt'$.
☐ $V = \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$.
☐ $V = \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, $\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)$.

Question 8 (2,5 points)**.** Soit V un espace vectoriel réel et $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ la norme issue du produit scalaire $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Parmi ces quatre réponses, trouver la formule qui **n'est** **pas** vérifiée pour tout $(x, y) \in V^2$:

☐ $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\|x + y\|^2 - \dfrac{1}{4}\|x - y\|^2$.
☐ $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{2}\|x + y\|^2 - \dfrac{1}{2}\|x\|^2 - \dfrac{1}{2}\|y\|^2$.
☐ $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{2}\|x\|^2 + \dfrac{1}{2}\|y\|^2 - \dfrac{1}{2}\|x - y\|^2$.
☐ $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\|x + y\|^2 + \dfrac{1}{4}\|x - y\|^2 - \dfrac{1}{2}\|x\|^2 - \dfrac{1}{2}\|y\|^2$.

Question 9 (2,5 points)**.** Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Parmi les propriétés suivantes, laquelle **n'est pas** vérifiée ?

- ☐ $\|Ax\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- ☐ Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- ☐ Pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, l'application affine $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax + b$ est une isométrie.
- ☐ $\det(A) = 1$.

Question 10 (2,5 points)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ une matrice symétrique ($A^t = A$). Parmi les propriétés suivantes, laquelle **n'est pas** vérifiée ?

- ☐ Les valeurs propres de A sont réelles.
- ☐ Les espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont deux-à-deux orthogonaux.
- ☐ Les valeurs propres de A sont des nombres algébriques.
- ☐ Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

Vrai ou Faux ?

Question 11 (1 point)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice symétrique. Alors, A est diagonalisable.

- ☐ Vrai.
- ☐ Faux.

Question 12 (1 point)**.** Soit $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de déterminant égal à -1. Alors, -1 est une valeur propre de A.

- ☐ Vrai.
- ☐ Faux.

Question 13 (1 point)**.** Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(V)$ telle que $f^m = \mathrm{Id}_V$ (où $m \geq 2025$). Alors, les valeurs propres de f sont des puissances des racines de l'unité $\zeta_m = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{m}\right)$.

- ☐ Vrai.
- ☐ Faux.

Question 14 (1 point)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $1 \leq k \leq n$ et $(B, C) \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_{n-k}(\mathbb{C})$ telles que $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Alors, A est diagonalisable si et seulement si C et D sont diagonalisables.

- ☐ Vrai.
- ☐ Faux.

Question 15 (1 point)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, A est semblable à une matrice de Jordan.

- ☐ Vrai.
- ☐ Faux.

Questions ouvertes

Exercice 1 (15 points)**.** Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3\,v_n \\ v_{n+1} = 3\,u_n + v_n + 4\,w_n \\ w_{n+1} = 4\,v_n + w_n \end{cases} \qquad \text{et } \ (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1).$$

1. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable.
2. Diagonaliser la matrice A.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire une expression des suites $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Exercice 2 (15 points)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} i-1 & 0 & 0 & -i \\ i & -3 & 1 & -i-4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -i & 1 & 0 & i+2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A = (X-i)^2(X+2)^2 \in \mathbb{C}[X]$.
2. Calculer la multiplicité géométrique des valeurs propres de A.
3. Trouver le polynôme minimal de A.
4. En déduire la forme de Jordan de A.
5. Trouver une base de Jordan de A.

Exercice 3 (20 points)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$. Sa matrice compagnon est définie par

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Supposons que $n \leq 3$. Montrer que $\chi_{C(P)} = P$ si $n = 2$ et $\chi_{C(P)} = -P$ pour $n = 3$, où pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, χ_A est le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que $\chi_{C(P)} = (-1)^n P$.

Supposons dans la suite de l'exercice que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soit $A = \{a_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et posons pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad D_i = \mathbb{C} \cap \{z : |z| \leq r_i\}.$$

Pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{C}^n$, soit $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

3. Montrer que pour tout $\lambda \in \sigma(A)$, si $x \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé à λ, on a pour tout $1 \leq i \leq n$: $|\lambda x_i| \leq r_i \|x\|_\infty$.
4. Montrer que
$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$
5. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que pour toute racine λ de P, on a l'inégalité
$$|\lambda| \leq \max\{|a_0|, |a_1| + 1, |a_2| + 1, \cdots, |a_{n-1}| + 1\}.$$
6. Cette inégalité est-elle optimale ?

Exercice 4 (20 points)**.** Supposons qu'il existe deux matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^2 = -\mathrm{I}_n, \qquad B^2 = -\mathrm{I}_n, \qquad AB + BA = 0_n, \tag{1}$$

où $0_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

1. Démontrer que n ne peut être impair.
2. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{H}$ engendré par les matrices I_n, A, B et AB est une sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire, qu'il est stable par multiplication matricielle.

3. Soit $C = AB$. Pour tout $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, calculer le produit

$$(t\,\mathrm{I}_n + x\,A + y\,B + z\,C)\,(t\,\mathrm{I}_n - x\,A - y\,B - z\,C)\,.$$

4. En déduire :
   (i) Que les quatre matrices I_n, A, B et C sont indépendantes et forment une base de $\mathbb{H}$.
   (ii) Que $\mathbb{H}$ est un corps.

5. **On suppose dans la suite du problème que** $n = 4$**.** Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} J & 0_2 \\ 0_2 & -J \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0_2 & -\mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

   On définit également $C = AB$.
   (i) Montrer que les matrices A et B satisfont aux conditions de l'équation (1). On appellera donc $\mathbb{H}$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par I_4, A, B et C. Ses éléments sont appelés des **quaternions**.
   (ii) Soit $M \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Vérifier que $M^t \in \mathbb{H}$. Quel lien y a-t-il entre M^t et l'inverse M^{-1} ?